/ /

تمرين -2

لتكن X مجموعة غير منتهية ولتكن الدالة:

$\mu^*: 2^X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

$$A \longrightarrow \mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{منتهية } A \\ 1 & \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

(1) اثبت أن μ^* قياس خارجي على 2^X لكنه ليس قياساً

(2) اوجد صف المجموعات المقيسة مع μ^* (أي اوجد μ^* المقيسة (μ^{*} مم))

الحل:

1) (ق 1) $\mu^*(\phi) = 0$ محقق لأن المجموعة الخالية ϕ منتهية وفيها (0) عناصر

نتيجة: $\mu^*(A) \geqslant 0$ محقق عموماً:

(ق 2) لتكن $A \subset B$ عندئذ $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$

~~$0 \leqslant 1$~~

~~$1 \leqslant 1$~~

اذا كانت B منتهية فإن A منتهية حتماً أي أن:

$\mu^*(A) = 0 \leqslant 0 = \mu^*(B)$

اذا كانت B غير منتهية ⟸ إما أن تكون A منتهية والتالي:

$\mu^*(A) = 0 \leqslant 1 = \mu^*(B)$

⟸ أو تكون A غير منتهية والتالي:

$\mu^*(A) = 1 \leqslant 1 = \mu^*(B)$

(ق 3): لتكن

$A_1, A_2, \ldots A_n \in 2^X$ ولنبين أن:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \text{--- (1)}$$

اذا كانت كل المجموعات A_n منتهية فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = 0 \Leftarrow \mu^*(A_n) = 0$$

بينما $\mu^{*}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ وعلماً أن $1 \neq 0$
ومنه بالعلاقة (1) غير محققة.
$\Leftarrow$ μ^{*} ليس قياساً خارجياً.

ملاحظة:
إذا كانت S نصف حلقة على X فتكون الحلقة المولدة بـ S هي
$$R(S) = \{ \sum_{i=1}^{n} A_i \;,\; n \in N \;;\; A_i \in S \}$$
فإذا كان
$\mu : S \to [0, +\infty]$ قياساً على نصف الحلقة S
فيمكن تمديده إلى $R(S)$ حيث أنه $S \subset R(S)$
بالشكل: $\tilde{\mu} : R(S) \to [0, +\infty]$ موسع
$$\sum_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$
(معرف على الحلقة $R(S)$) (معرف على نصف الحلقة) (معرف على S)

$\mu : S \to$
$A \to \mu(A)$
$\tilde{\mu} : R(S) \to$

$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \to \sum \mu(A_i) = \tilde{\mu}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$
اجتماع

ـ انظر الحاصرة؟